UNIDAD N° 2:

HERRAMIENTAS BÁSICAS.

MODELO MATEMÁTICO LINEAL. MODELIZACIÓN.

CONCEPTOS BÁSICOS.

Ej. Se trata de una empresa que fabrica diversos productos químicos en un proceso de producción particular se usan 3 materias primas para elaborar dos productos.

Productos: 1- Un aditivo para combustible. 2- Una base para solvente.

El aditivo se vende a las compañías petroleras y se utiliza en la producción de gasolina y otros combustibles.

La base para solvente se vende a diversas empresas de productos químicos y se usa en artículos de limpieza para el hogar y la industria.

Las 3 materias primas se mezclan para formar los dos productos, y la mezcla que se utiliza es la siguiente:

REQUERIMIENTO DE MATERIAL POR TONELADA PARA EL PROBLEMA DE LA EMPRESA		
	ADITIVO	BASE
MATERIAL 1	0,4	0,5
MATERIAL 2	-	0,2
MATERIAL 3	0,6	0,3

La producción de esta empresa está restringida por una disponibilidad limitada de las 3 materias primas, para el período de producción actual la empresa cuenta con las siguientes cantidades de cada materia prima:

MATERIAL	CANTIDAD DISPONIBLE PARA PRODUCCIÓN
MATERIAL 1	20 TONELADAS
MATERIAL 2	5 TONELADAS
MATERIAL 3	21 TONELADAS

Y sabemos que debido al deterioro y a la naturaleza del proceso de producción los materiales que no se utilizan en la producción actual no son útiles y deben desecharse.

El departamento de contabilidad analizó las cifras de producción y asignó todos los costos relevantes y llegó al precio para ambos productos que generarían una contribución a las utilidades de $40 por tonelada producida de aditivo, y de $30 por cada tonelada producida de base para solvente.

Representar el problema mediante un modelo matemático, modelización o planteamiento del modelo lineal.

1- Formulación del problema.

Es el proceso de traducir una descripción verbal de un problema en un enunciado matemático, aunque cada problema tiene características únicas, la mayoría tiene muchas características comunes o parecidas.

Problema: determinar cuánto de cada producto debe fabricar para maximizar la contribución total a las utilidades. El número disponible de toneladas de los 3 materiales que se requieren para fabricar los dos productos, van a delimitar la cantidad de toneladas que pueden elaborarse de cada producto.

2- Definir el objetivo.

Maximizar la contribución total a las utilidades.

3- Describir cada restricción.

Son las 3 restricciones que limitan el número de toneladas de aditivos y base para solvente:

I. El número de toneladas del material 1 empleadas debe ser ≤ 20 toneladas disponibles.

II. El número de toneladas del material 2 empleadas debe ser ≤ 5 toneladas disponibles.

III. El número de toneladas del material 3 empleadas debe ser ≤ 21 toneladas disponibles.

4- Definir las variables de decisión.

Las variables de decisión son los insumos o variables controlables en el problema.

Las dos variables de decisión son:

I. El número de toneladas producidas de aditivo para combustible □ X1

II. El número de toneladas producidas de base para solvente □ X2

5- Escribir la función objetivo de la variable de decisión.

La contribución de las utilidades que proviene de la producción de X1; X2

X1= $40 X2= $30 □ Contribución total a las utilidades= 40 + 30

Max 40 X1 + 30 X2

(s.a.) 0,4 X1 + 0,5 X2 ≤ 20 □ R1

0,2 X2 ≤ 5 □ R2

0,6 X1 + 0,3 X2 ≤ 21 □ R3

X1; X2 ≥ 0 □ Restricciones de no negatividad

Se debe encontrar la mezcla de productos, es decir, las combinaciones de X1; X2 que satisfaga todas las restricciones, y al mismo tiempo produzca un valor máximo para la función objetivo.

-MÉTODO GRÁFICO.

Resolver un programa lineal como es el método gráfico significa encontrar un conjunto de valores para las variables de decisión, que cumpliendo con todas las restricciones incluidas las de no negatividad, y optimiza a la función objetivo. Para identificar la solución óptima debemos encontrar primero el conjunto de todos los valores de X1 y X2

que son solución del sistema de inecuaciones de restricción, y luego de ello identificar cuál optimiza a la función Z.

Max 40 X1 + 30 X2

(s.a.) 0,4 X1 + 0,5 X2 ≤ 20

0,2 X2 ≤ 5

0,6 X1 + 0,3 X2 ≤ 21

X1; X2 ≥ 0

SOLUCIÓN FACTIBLE

0,4 X1 + 0,5 = 20 0,4 X1 + 0,5 X2 = 20 0,2 X2 = 5

X1=0 0,5 X2 =20 X2=0 0,4 X1 = 20 X2 = $\frac{5}{0,2}$

X2 = $\frac{20}{0,5}$ X1 = $\frac{20}{0,4}$ X2 = 25 P(0; 25)

X2 = 40 P(0; 40) X1 = 50 P(50; 0)

0,6 X1 + 0,3 X2 = 21 0,6 X1 + 0,3 X2 = 21

X1=0 0,3 X2 = 21 X2=0 0,6 X1 = 21

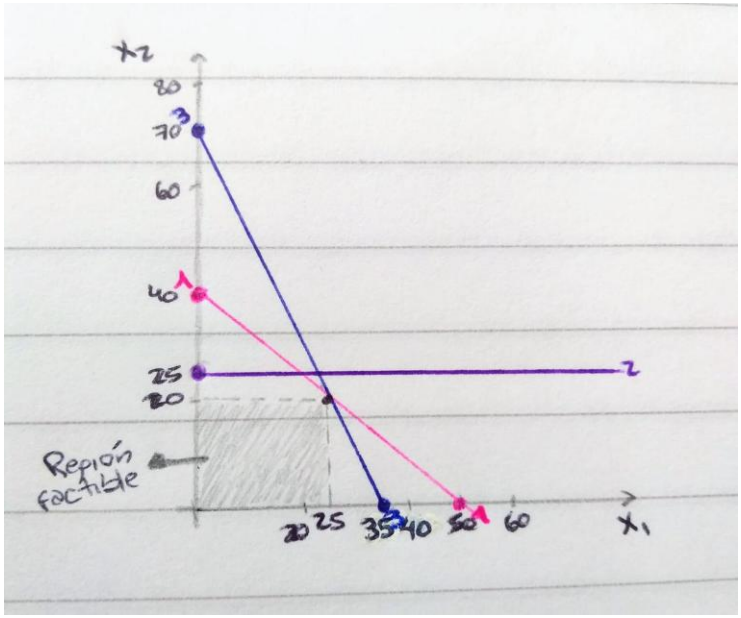
X2 = $\frac{21}{0,3}$ X1 = $\frac{21}{0,6}$

X2 = 70 P(0; 70) X1 = 35 P(35; 0)

Cualquier punto en el límite de la solución factible es un punto de solución factible para este modelo matemático. Una vez identificada la solución factible estamos listos para proseguir con el método gráfico o de la solución gráfica, y obtener la solución óptima para el problema.

Un método para encontrar la solución óptima sería evaluar la función objetivo para cada solución factible.

Otra solución sería que lo trabajemos desde la gráfica, y obtener o determinar los valores óptimos exactos de X1 y X2.



MAX

Intersección entre: 0,4 X1 + 0,5 X2 = 20

0,6 X1 + 0,3 X2 = 21

0,4 X1 + 0,5 X2 = 20

0,4 X1 = 20 – 0,5 X2

X1 = $\frac{20}{0,4}$ - $\frac{0,5}{0,4}$ X2

X1 = 50 – 1,25 X2

X1 = 50 – 1,25 * 20

X1 = 25

0,6 X1 + 0,3 X2 = 21

0,6 (50 – 1,25 X2) + 0,3 X2 = 21

30 – 0,75 X2 + 0,3 X2 = 21

-0,45 X2 = 21 - 30

X2 = $\frac{-9}{0,45}$

X2 = 20

X1 = 25 X2 = 20 P (25; 20) □ Solución óptima

Max 40 X1 + 30 X2

40 * 25 + 30 * 20 = 1.600

VARIABLES DE HOLGURA.

Además de la solución óptima y la utilidad asociada, la empresa querrá información sobre los requerimientos de producción para los 3 materiales. Podemos obtener esta información al sustituir los valores de la solución óptima en las restricciones.

RESTICCIÓN	TONELADAS REQUERIDAS PARA: X1 = 25 Y X2 = 20	TONELADAS DISPONIBLES	TONELADAS SIN UTILIZAR (HOLGURA)
MATERIAL 1	0,4 (25) + 0,5 (20) = 20	20	S1 = 0
MATERIAL 2	0,2 (20) = 4	5	S2 = 1
MATERIAL 3	0,6 (25) + 0,3 (20) = 21	21	S3 = 0

La solución óptima de la solución de 25 toneladas de aditivo para combustible y 20 toneladas de base para solvente requiere todo el material 1 y todo el material 3 disponible, pero solo 4 de las 5 toneladas del material 2, la tonelada que queda sin utilizar se conoce como holgura, por lo tanto, podemos decir que la restricción del material 2 tiene una holgura de 1 tonelada.

Estas variables de holgura se añaden a la formación del problema, para representar la holgura con capacidad sin utilizar asociada con una restricción, la capacidad sin utilizar no contribuye a las utilidades por lo que las variables de holgura tienen coeficiente de 0 en la función objetivo.

Max 40 X1 + 30 X2 + 0S1 + 0S2 + 0S3

(s.a.) 0,4 X1 + 0,5 X2 + S1 = 20

0,2 X2 + S2 = 5 □ Al estar expresado como una igualdad, se dice que está

0,6 X1 + 0,3 X2 + S3 = 21 expresado en forma estándar.

X1; X2; S1; S2; S3 ≥ 0

-PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN.

El dueño de una tienda de mascotas prepara una mezcla especial de comida para los perros que tiene en guardería durante el fin de semana combinado 2 alimentos, que les llamaremos I y II, el veterinario ha sugerido que la grasa contenida en la mezcla no debe superar los 300 gramos, y que por lo menos debe tener 40 unidades de vitamina A.

El alimento I contiene 10 gramos de grasa y 4 unidades de vitamina A por cada kilo, mientras que el alimento II contiene 20 gramos de grasa y 3 unidades de vitamina A por kilo. También aconsejó incluir en la mezcla por lo menos 3 kilos de alimento II.

Además de lo indicado por el veterinario debe tenerse en cuenta que el alimento I solo puede conseguir hasta 8 kilos por semana y que debido a la cantidad promedio de perros en la guardería necesita por lo menos 12 kilos de mezcla por fin de semana. El costo del alimento I es de $5 por kilo y el del alimento II es de $7 por kilo.

Para modelizar el problema hay que identificar el objetivo, definir las variables y enunciar las restricciones.

Objetivo: minimizar el costo total de la mezcla de alimentos.

Variables: X1 = Alimento I X2= Alimento II

Restricciones:

1. El contenido máximo de grasa ≤ 300 gramos.
2. La mezcla debe contener 400 unidades de vitamina A.
3. Se puede conseguir del Alimento II 8 kilos por semana.
4. La mezcla debe contener por lo menos 3 kilos de Alimento II.
5. Se necesita por lo menos 12 kilos de mezcla por fin de semana.
6. X1; X2 ≥ 0

Función objetivo □ Min 5X1 + 7X2 + 0S1 + =S2 + =S3 + 0S4 + 0S5

Min 5 X1 + 7 X2

(s. a.) 10 X1 + 20 X2 ≤ 300

4 X1 + 3 X2 ≥ 40

X1 ≤ 8

$X2 \geq 3$

$X1 + X2 \geq 12$

$X1; X2 \geq 0$

$10\ X1 + 20\ X2 = 300$ $10\ X1 + 20\ X2 = 300$ $X1 + X2 = 12$ $X1 + X2 = 12$

$X1=0$ $20\ X2 = 300$ $X2=0$ $10\ X1 = 300$ $X1=0$ $X2 = 12$ P(0; 12) $X2=0$ $X1 = 12$ (12; 0)

$X2 = \frac{300}{20}$ $X1 = \frac{300}{10}$

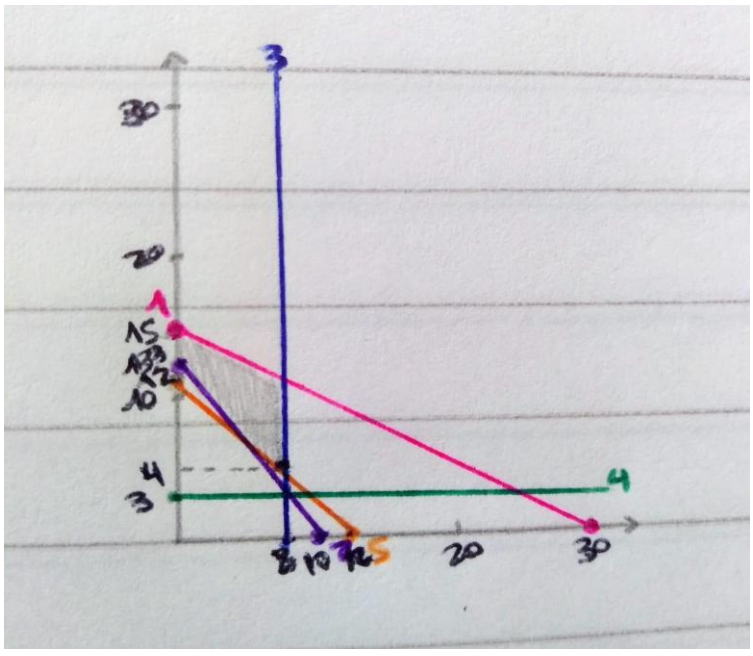
X2 = 15 P(0; 15) X1 = 30 P(30; 0)

$4\ X1 + 3\ X2 = 40$ $4\ X1 + 3\ X2 = 40$

$X1=0$ $3\ X2 = 40$ $X2=0$ $4\ X1 = 40$

$X2 = \frac{40}{3}$ $X1 = \frac{40}{4}$

X2 = 13,3 P(0; 13,3) X1 = 10 P(10; 0)



MIN

X1 = 8

X1 + X2 = 12

8 + X2 = 12 X1 = 8 X2 = 4 Min 5 X1 + 7 X2

X2 = 12 – 8 5 (8) + 7 (4) = 68

X2 = 4

VARIABLES DE HOLGURA

RESTRICCIÓN	REQUERIMIENTOS	DISPONIBLE	SIN UTILIZAR
1	10 (8) + 20 (4) = 160	300	S1 = 140
2	4 (8) + 3 (4) = 44	40	S2 = 4
3	X1 = 8	8	S3 = 0
4	X2 = 4	3	S4 = 1
5	X1 + X2 = 8 + 4 = 12	12	S5 = 0

Min 5 X1 + 7 X2 + 0 S1 + 0 S2 + 0 S3 + 0 S4 + 0 S5

10 X1 + 20 X2 + 1 S1 = 300

4 X1 + 3 X2 + 1 S2 = 40

X1 + 1 S3 = 8

X2 + 1 S4 = 3

X1 + X2 + 1 S5 = 12

X1; X2; S1; S2; S3; S4; S5 ≥ 0

Especificaciones técnicas. Contiene un kilo por encima del mínimo requerido del Alimento II y exactamente el máximo permitido del Alimento I. La cantidad de grasa aportada es de 160 y contiene más de las vitaminas A que requieren.

-CONCEPTOS BÁSICOS.

Para un problema expresado en forma estándar con “m” ecuaciones de restricciones y “n” variables incluidas las de holgura o excedentes, vamos a enunciar los siguientes conceptos respecto al conjunto de soluciones del problema.

SOLUCIÓN FACTIBLE O POSIBLE. Un conjunto de valores de las variables Xj que verifican el sistema de restricciones incluidas las de no negatividad.

SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA. Es toda solución que tiene como máximo “m” variables positivas o lo que es lo mismo, tiene al menos “n-m” valores de las variables nulas. El número máximo de soluciones básicas se calcula con:

SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA NO DEGENERADA. Tiene exactamente “m” variables positivas o exactamente “n-m” variables nulas.

SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA DEGENERADA. Tiene menos de “m” variables positivas o más de “n-m” variables nulas.

SOLUCIÓN ÓPTIMA. Es toda solución que le da a la función Z el máximo o mínimo valor.

-TEOREMA DE COMBINACIONES LINEALES CONVEXAS DE SOLUCIONES FACTIBLES.

1ER TEOREMA. Toda combinación lineal convexa de soluciones factibles de un programa lineal es otra solución factible de dicho programa.

2DO TEOREMA. Si existe más de una solución factible que le den el mismo valor a la función objetivo cualquier combinación lineal dará igual valor.

3ER TEOREMA. Si un programa lineal es resoluble, es decir, posee óptimo existirá siempre por lo menos una solución factible básica que también sea óptima.